Apprentissages mathématiques
Cycles 2 et 3

Résolution de problèmes
Sens des opérations

Un exemple pour commencer…

Entrée 6e

Julie a acheté :
- deux livres à 8 € chacun
- quatre bandes dessinées à 6 € chacune
- un dictionnaire.

Elle a payé 56 €.
Quel est le prix du dictionnaire?

8 € **X** 6 € = 54 €
Le prix du dictionnaire est 2 €.

Comment l'analyser ?

Julie a acheté :
- deux livres à 8 € chacun
- quatre bandes dessinées à 6 € chacune
- un dictionnaire.

Elle a payé 56 €.
Quel est le prix du dictionnaire?

8 € x 6 € = 54 €
Le prix du dictionnaire est 2 €.

Analyse spontanée

- L'élève n'a pas lu correctement l'énoncé, n'a pas cherché à comprendre la situation
- L'élève a fait n'importe quel calcul avec les nombres de l'énoncé
- L'élève a été piégé par les nombres écrits en lettres

Une analyse complémentaire

Julie a acheté :
- deux livres à 8 € chacun
- quatre bandes dessinées à 6 € chacune
- un dictionnaire.

Elle a payé 56 €.
Quel est le prix du dictionnaire?

8 € x 6 € = 54 €
Le prix du dictionnaire est 2 €.

Analyse plus approfondie

- Il y a une certaine cohérence dans cette résolution inexacte.
- L'élève semble avoir reconnu les 2 étapes :
  - chercher le prix de l'ensemble : livres + bd
  - en déduire le prix du dictionnaire (par complément ou différence)

Recherche des causes de l'erreur

Julie a acheté :
- deux livres à 8 € chacun
- quatre bandes dessinées à 6 € chacune
- un dictionnaire.

Elle a payé 56 €.
Quel est le prix du dictionnaire?

8 € x 6 € = 54 €
Le prix du dictionnaire est 2 €.

- Il n'utilise que les nombres écrits en chiffres.
- Il est influencé par des mots de l'énoncé : *chaque* est inducteur de multiplication.
- Il connaît mal les tables de multiplication.

Un deuxième exemple…

Evaluation CM2 et…vu à la télé…

Sachant que 4 stylos valent 2,42 €,
combien valent 14 stylos ?

« La règle de trois.
Je ne sais pas faire, c'est affreux…
montrez moi ! ».

Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ?

Comment l'analyser ?

- La peur de se dévoiler, de montrer qu'on ne sait pas…
- Malgré le fait qu'on peut répondre sans la « règle de trois »…
- … par un raisonnement du type :
  - *2 stylos valent donc 1,21 €*
  - *14 stylos valent donc 8,47 €*

Des enjeux de l'enseignement des mathématiques

La pratique des mathématiques développe le goût de la **recherche** et du **raisonnement**, l'**imagination** et les capacités d'**abstraction**, la **rigueur** et la **précision**.

(*Académie des Sciences, janvier 2007*)

Programme de mathématiques
Cycle 2

- **Au cycle 2, la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique** des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer.
- Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements.
- On veillera à proposer aux élèves **dès le CP** des problèmes pour apprendre à chercher **qui ne soient pas de simples problèmes d'application** à une ou plusieurs opérations mais **nécessitent des recherches avec tâtonnements.**

(B. O. spécial n°11 - 26 novembre 2015)

Programme de mathématiques
Cycle 3

- La résolution de problèmes constitue **le critère principal de la maitrise des connaissances** dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également **le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens.**
- On veille aussi a proposer aux élèves des **problèmes pour apprendre a chercher qui ne soient pas directement reliés a la notion en cours d'étude**, qui ne comportent pas forcément une seule solution, **qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements.**

(B. O. spécial n°11 - 26 novembre 2015)

Quels objectifs pour les problèmes à l'école ?

- Etre capable d'utiliser ses connaissances pour **résoudre rapidement** (voire immédiatement) certains problèmes : utiliser directement le **sens des concepts mathématiques.**
- Pouvoir mettre en place **des stratégies** pour venir à bout de problèmes qu'on ne sait pas résoudre rapidement
- S'approprier **des nouvelles connaissances, en partant de problèmes** qui résistent aux connaissances déjà apprises

Plan

- Les difficultés des élèves en résolution de problèmes : constat, pistes d'analyse
- Propositions pour la classe
- La question du sens des opérations

Qu'est-ce qu'un problème ?

- Une situation qui demande à l'élève d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre un but (répondre à une question).
- Il n'y a problème que si **la solution n'est pas disponible d'emblée**, mais possible à construire.
- Un problème pour un élève donné peut ne pas être un problème pour un autre élève.

Compétences de base
constat global

- **Près d'1 élève sur 5** a des difficultés avec les "*compétences nécessaires pour profiter pleinement des situations pédagogiques de sixième*" (pour plus de 2/3 des items considérés des évaluations 6e).
- **Un domaine** particulier de difficultés :
  la **résolution de problèmes**

Comparaison internationale (PISA)
Quelques caractéristiques

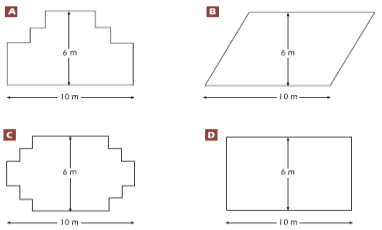
- Elèves français autour de la moyenne
- Taux élevé d'élèves à résultats faibles
- Taux assez faible d'élèves à résultats élevés

- Des élèves **plus angoissés** que les autres face aux évaluations mathématiques
- Un taux élevé de "non réponse"

- Une faiblesse particulière lorsqu'il faut "**prendre des initiatives**, expérimenter (faire des essais, critiquer, recommencer…)"

Un exemple

Un menuisier dispose de 32 m de planches et souhaite s'en servir pour faire la bordure d'une plate-bande dans un jardin. Il envisage d'utiliser un des tracés suivants pour cette bordure :



Indiquez pour chacun des tracés s'il peut être réalisé avec les 32 m de planches.

Analyse des difficultés

Evaluation 6e

Xavier range les 50 photos de ses dernières vacances dans un classeur.

Chaque page contient 6 photos.

a) Combien y a-t-il de pages complètes ?

b) Combien y a-t-il de photos sur la page incomplète ?

Il y a …… pages complètes. 54 %

Il y a …… photos sur la page incomplète. 57 %

Procédures possibles

- **Division de 50 par 6**
  - Division *(stabilisée au CM1)*
  - Interprétation du quotient et du reste
- **Essais organisés ou non de produits par 6**
  - Table de multiplication *(CE2)*
  - Encadrement entre 2 produits, calcul du reste
- **Addition ou soustraction de 6 en 6**
  - Addition *(CE1 / CE2)*
  - Comptage des « 6 », calcul du reste
- **Schématisation des pages et des photos**
  - Dénombrement *(CP)*

Un constat et une question

Un nombre élevé de calculs "sans signification"

Peu de démarches "originales"

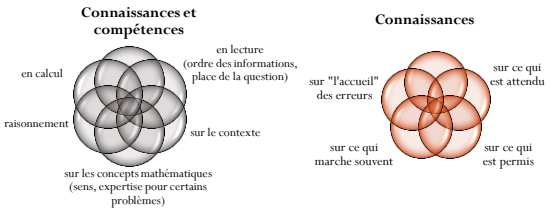
Pourquoi beaucoup d'élèves qui disposent de connaissances suffisantes…

- ne pensent pas…
- n'osent pas…
- ne se croient pas autorisés…

… (à) les utiliser pour répondre à la question ?

Un cadre pour travailler sur l'origine des difficultés

Schéma d'analyse sommaire



A la bonne place (éva CE2)

Ecris, dans le bon ordre, chaque nombre à la place qui convient.

367 582 309

300		400		500		600

300	*309*	400	*367*	500	*582*	600

Quelques pistes pour "apprendre à résoudre"

1ère piste
Apprendre ce qu'est *chercher*

Deux exemples…

- 150 personnes se répartissent en équipes de 6 personnes.
  Combien y a-t-il d'équipes ?
- 150 personnes se serrent la main.
  Combien de poignées de mains sont échangées ?

25 R. Charnay - G. Combier - 2017

Apprendre ce qu'est *chercher*
Clarifier le contrat

Un mot à double sens

- Chercher parmi les solutions *expertes* déjà éprouvées
- Chercher, bricoler une solution nouvelle, originale, *personnelle*, comme le chercheur

26 R. Charnay - G. Combier - 2017

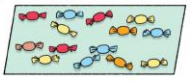
Des exemples de « problèmes pour chercher »

CP-Cap Maths

3 Arthur et Zoé veulent se partager ces noisettes. Arthur doit avoir autant de noisettes que Zoé.

Entoure la part de chacun.

4 Arthur et Zoé veulent se partager ces papillotes. Arthur doit avoir autant de papillotes que Zoé.



Entoure la part de chacun.

27 R. Charnay - G. Combier - 2017

Deux exemples de « problèmes pour chercher »

D'après Cap maths CM1

1 Dans la tirelire de Réda, il n'y a que des pièces de 10 centimes, de 20 centimes et de 50 centimes.
Il y a autant de pièces de chaque sorte et cela représente 8 euros.
Combien Réda a-t-il de pièces de chaque sorte ?

2 Dans sa tirelire, Réda n'a que des pièces de 20 centimes et de 50 centimes.
En tout, il a 13 pièces qui représentent 5 euros.
Combien Réda a-t-il de pièces de chaque sorte ?

28 R. Charnay - G. Combier - 2017

2e piste
Favoriser l'appropriation du problème

- Ne pas confondre lecture d'énoncé et résolution de problème
- Plusieurs supports de présentation
  - Situation **réelle**
  - Situation **représentée** : dessin, schéma, document
  - Situation communiquée **oralement**
  - Situation communiquée par un **énoncé écrit**

29 R. Charnay - G. Combier - 2017

Rôle du matériel
Des tours toutes pareilles

Cap maths CE1

Lou a 30 cubes. Il construit des tours, toutes faites avec 4 cubes
Combien peut-il construire de tours ?

30 R. Charnay - G. Combier - 2017

Réel / Anticipation

Réel

Favorise l'**appropriation** de la situation et du problème

Anticipation

Incite à l'expérience mentale

Oblige à **élaborer des procédures**

Permet la **validation** de la réponse ou d'une procédure

31 R. Charnay - G. Combier - 2017

3e piste
Limiter les références possibles à des indices « extérieurs » au problème

- Ne pas lier systématiquement les problèmes aux apprentissages en cours
- Eviter les aides « de surface »

32 R. Charnay - G. Combier - 2017

4e piste
Exploiter la diversité des procédures

- Favoriser la diversité
- Exploiter la diversité
- Aider à progresser vers les résolutions expertes

33 R. Charnay - G. Combier - 2017

Exemple de prise en compte de l'erreur

CM1 Cap-maths

A Gaïa met bout à bout des bandes vertes, toutes de même longueur.
En mettant bout à bout 4 bandes vertes, elle obtient une longueur de 8 cm.

Quelle longueur obtiendra-t-elle en mettant bout à bout :
a. 8 bandes vertes ?
b. 12 bandes vertes ?
c. 40 bandes vertes ?
d. 48 bandes vertes ?

Proposition 1		Proposition 2	
4 bandes	8 cm	4 bandes	8 cm
8 bandes	12 cm	8 bandes	16 cm
12 bandes	16 cm	12 bandes	24 cm

34 R. Charnay - G. Combier - 2017

Correction ou mise en commun ?

Mise en commun

- Inventorier les « résolutions »
- Débattre de leur validité
- Les comparer
- Conséquence : la diversité est possible

Correction

- Aboutir au corrigé, à LA solution
- Conséquence : « résolution » unique dont il faut s'approcher le plus possible

35 R. Charnay - G. Combier - 2017

Trace écrite ?

- Pas de trace écrite cette fois-ci
- Un montage de différentes « résolutions » correctes
- Une « résolution » correcte, au choix de chaque élève

36 R. Charnay - G. Combier - 2017

5e piste
Aider à progresser…

- Prise de conscience au cours de la mise en commun
- Mise en lien, établissement de ponts entre des « résolutions » en apparence différentes
- Choix des variables
  - Favoriser certaines procédures
    - *60 photos, 6 par page*
  - Bloquer certaines procédures
    - *250 photos, 6 par page*

37 R. Charnay - G. Combier - 2017

En conclusion

Résoudre des problèmes suppose :

- Un **contrat** (il y a toujours plusieurs modes de résolution)
- Des **connaissances** (sens et techniques)

38 R. Charnay - G. Combier - 2017

Le sens des opérations

39 R. Charnay - G. Combier - 2017

La question du « sens »

3 niveaux pour la résolution

Appel au sens « primitif »	Appel à un sens « appris »	Appel au Raisonnement

40 R. Charnay - G. Combier - 2017

Exemple de la soustraction

Sens « primitif »	Sens « acquis »	Raisonnement
• En 1980, la population d'un village était de 1678 habitants. Elle a diminué de 243 habitants. Quelle est la population actuelle ?	• En 2008, la population d'un village est de 1540 habitants. Elle a augmenté de 189 habitants depuis 1980. Quelle était la population en 1980 ?	• Lucie aime jouer aux billes. A la fin de la journée, elle a 6 billes de moins que le matin. Déjà, la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 10 billes. Que s'est-il passé l'après-midi ?

41 R. Charnay - G. Combier - 2017

Exemple de la division

Sens « primitif »	Sens « acquis »	Raisonnement
• Sophie a reçu 150 photos. Elle en distribue le plus possible à ses 6 amies et garde le reste pour elle. Chacune de ses amies doit en avoir le même nombre. Combien chaque amie en aura-t-elle ? Combien Sophie en aura-t-elle ?	• Sophie a reçu 150 photos. Elle les colle dans un album. Elle peut mettre 6 photos par page. Combien utilisera-t-elle de pages complètes ? • Combien y aura-t-il de photos sur la page incomplète ?	• Lucie compte de 6 en 6 en reculant : « 150, 144, 138… ». Combien va-t-elle dire de nombres ? Quel sera le dernier nombre prononcé ?

42 R. Charnay - G. Combier - 2017

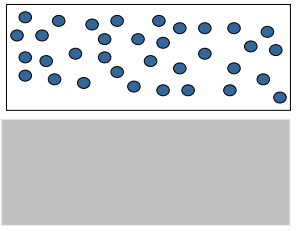
Pour quels problèmes,
faut-il parvenir à l'expertise ?
Comment ?

- **Expertise** pour les problèmes relevant
  - Du sens « naturel »
  - Du sens « appris »
- Pour les autres problèmes, pratique du **raisonnement**
- Pour les problèmes où l'expertise est visée, le raisonnement précède l'expertise (recours à des procédures personnelles)

Aider à mettre en relation « sens primitif » et « sens appris »
Exemple de la soustraction

Equivalence entre
calcul d'un « reste »
(résultat d'une diminution)
et
calcul d'un complément

À partir d'une situation
Combien de points cachés ?



MATERIEL DE L'ENSEIGNANT

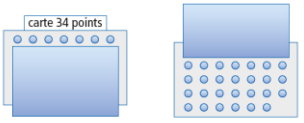
← une feuille de points *(nombre de points connu des élèves)*

← une feuille cache

La question
Trouver combien de points sont cachés ?

Il y a 34 points sur la carte, on n'en voit que 7. Combien de points sont cachés ?

- Les procédures figuratives ou le comptage peuvent être sources d'erreurs
- Les procédures sollicitant un calcul sont plus fiables
- La validation permet d'installer l'équivalence recherche d'un complément et soustraction



carte et cache pour la question d

carte et cache pour la validation

Calculer par un moyen équivalent ?

Exemples en calcul mental

- 2 pour aller à 47 → plutôt soustraction
- 36 pour aller à 40 → plutôt complément
- 20 pour aller à 50 → plutôt ?

- 52 – 4 → plutôt soustraction
- 61 – 58 → plutôt complément
- 60 – 35 → plutôt ?

Aider à mettre en relation « sens primitif » et « sens appris »

Exemple de la division

Equivalence entre

recherche de la valeur de chaque part

(partage)

et

recherche du nombre de parts

(groupement)

Pourquoi ces deux problèmes :

« 90 objets sont répartis dans 12 paquets. Combien d'objets par paquet ? »

et

« 90 objets sont groupés par paquets de 12. Combien de paquets complets ? »

correspondent-ils tous deux à la division de 90 par 12 ?

Pourquoi :

« 90 partagé en 12 »

et

« Combien de fois 12 dans 90 ? »

correspondent-ils tous deux à la division de 90 par 12 ?

Des procédures initiales qui peuvent cacher l'équivalence

- **Valeur d'une part (90 partagé en 12 parts)**
  - essai du type 5 + 5 + 5… (12 fois)
- **Nombre de parts (90 en parts de 12)**
  - 12 + 12 + 12… jusqu'à s'approcher de 90
  - 90 – 12 = 78 ; 78 – 12 = 66… jusqu'à s'approcher de 0

Des procédures pour comprendre l'équivalence

Procédures de résolution

- **Valeur d'une part** *(90 partagé en 12 parts)*
  - 12 parts de combien ?
  - 12 fois combien pour s'approcher de 90
  - 12 x … avec résultat égal ou juste inférieur à 90
- **Nombre de parts** *(90 en parts de 12)*
  - combien de parts de 12 ?
  - combien de fois 12 ?
  - 12 x … avec résultat égal ou juste inférieur à 90

Procédure de contrôle

- Dans les 2 cas, vérification par (12 x 7) + 6 = 90

Importance de la relation entre division et multiplication

Appui sur le calcul mental

- Questions du type 60 divisé par 2 ou 60 divisé par 3
  - incite à partager 60 en 2 (prendre la moitié de 60) ou 60 en 3
- Questions du type 60 divisé par 30 ou 60 divisé par 15
  - incite à chercher combien de fois 30 dans 60 ou combien de fois 15 dans 60

Conclusion